

Вступительный тест по математике, ЭМШ, 2021-2022 год, вариант _____

1. Решите уравнение

$$(x + 2)^3 + (x - 2)^3 = 36x$$

В ответ запишите сумму решений.

- 1)0; 2)12; 3)Нет правильного ответа; 4)36; 5)1.

2. Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением

$$\sqrt{13 - 6\sqrt{4} * (6 + 2\sqrt{4})}$$

- 1)1; 2) 10; 3)18; 4)Нет правильного ответа; 5)12.

3. Решите неравенство:

$$|x^2 - 8x + 12| \geq 12$$

Выберите множество, являющееся решением

- 1) $(-\infty; 0]$; 2) $(-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$; 3) $[8; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0] \cup (8; +\infty)$; 5)бесконечно много.

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 y^3 = 16 \\ x^3 y^2 = 2 \end{cases}$$

Пусть (x, y) – решение системы и всего система имеет n решений. В ответе укажите $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)$. Другими словами, в ответе укажите сумму координат всех решений. Например, если у системы два решения: $(1, 2)$ и $(3, 4)$, то в ответе укажите $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

- 1)Нет 2)1,5; 3)4,5; 4)9; 5)18.
правильного ответа;

5. Какие остатки может иметь простое число, большее 3, при делении на 6? Если ответов несколько, в ответе укажите их сумму.

- 1)Нет 2)6; 3)9; 4)15; 5)1.
правильного ответа;

6. Даны прямоугольный треугольник ABC (угол C прямой) и правильный треугольник XYZ. Угол A равен 30 градусам, а высота CH равна 2. Радиус вписанной в треугольник XYZ окружности равен 2. Найти произведение площадей этих треугольников.

- 1)8; 2)24; 3)96; 4)144; 5)Нет правильного ответа.

7. Дан треугольник ABC, $AB=BC$, а также окружность с центром в точке O радиуса 1, проходящая через точки A, B и пересекающая прямую BC в точке D, отличной от точек B и C. Найдите расстояние от точки O до центра описанной у треугольника ADC окружности.

- 1)1; 2)0,5; 3)1,5; 4)2; 5)Нет правильного ответа.

8. Известно, что высота трапеции равна 15, а её диагонали равны 17 и 113. Чему равна площадь трапеции?

- 1)900; 2)780; 3)1800; 4)Неоднозначно определена; 5)Нет правильного ответа.

9. Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(x) \cdot \cos(2x) + \sin(4x) = \frac{5}{4}$. Пусть x_0 – наименьший неотрицательный корень этого уравнения. В качестве ответа выберите $\frac{\pi}{x_0}$.

- 1)4; 2)8; 3)16; 4)32; 5)Нет правильного ответа.

10. Найдите все значения параметра a , при которых хотя бы 1 решение имеет

$$\begin{cases} 2a - 3t \leq 4, \\ a + 2t \geq \frac{t^2}{8} + 2, \\ 2a + t \leq 20. \end{cases}$$

следующая система неравенств: В ответе укажите разницу между максимальным и минимальным подходящими значением a .

- 1)18; 2)16; 3)14; 4)12; 5)Нет правильного ответа.

11. Пусть дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$, у которой $a_1 = 4$, а разность равна 3. Вычислите $\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{64}} + \sqrt{a_{65}}}$.

- 1)3; 2) $2\sqrt{3}$; 3)4; 4) $3\sqrt{2}$; 5)Нет правильного ответа.

Вступительный тест по математике, ЭМШ, 2021-2022 год, вариант _____

12. Однажды на Выездной Школе ЭМШ на одной из утренних лекций рядом друг с другом сели два старика ЭМШ: Игорь и Вадим. У них завязался разговор о преемственности поколений, в ходе которого Игорь, любитель посчитать в уме, окинул беглым взглядом аудиторию и заключил, что в ней в данный момент находятся 12 человек, окончивших ЭМШ и преподававших в ней, 8 человек, окончивших экономический факультет МГУ и окончивших ЭМШ, 11 человек, окончивших экономический факультет МГУ и преподававших в ЭМШ. При этом людей, относящихся ко всем трём группам, четверо. Игорь также заметил, что преподававших в ЭМШ на 10 больше, чем окончивших экономический факультет МГУ, а окончивших ЭМШ на 16 больше, чем преподававших в ЭМШ. Зная, что в аудитории всего 99 людей, преподававших в ЭМШ или окончивших экономический факультет МГУ, или окончивших ЭМШ, вычислите, сколько людей оканчивали ЭМШ.

- 1) 38; 2) 30; 3) 56; 4) 40; 5) Нет правильного ответа.

13. Имеются два слитка бронзы, в состав которых входят только медь и олово. В первом содержание олова составляет $\frac{2}{3}$, а во втором 50%. Эти два слитка сплавляли, после чего сплавляли получившийся слиток с 10 килограммами меди. В результате получился слиток с 20% олова. Если бы вместо 10 килограммов меди к изначальным слиткам добавили десятикилограммовый бронзовый слиток, содержащий 90% олова, то получился бы слиток с 80% олова. Найдите веса изначальных слитков. В качестве ответа укажите величину x^2y , где x – вес первого слитка, а y – вес второго слитка.

- 1) 18; 2) 48; 3) 28; 4) 66; 5) Нет правильного ответа.

14. На заводе одной известной яблочной компании есть робот, который может производить микросхемы двух типов: А и В. Для производства детали каждого типа робот затрачивает какое-то натуральное число элементарных операций (для каждого типа – своё). Известно, что на производство одной детали А и пяти деталей В роботу потребуется суммарно 150 операций. Если бы робот изготовил только детали типа А, причем в количестве, равном числу операций, которое он тратит на производство одной детали типа В, то у него на это ушло бы более 1120 операций. Найдите, сколько операций робот затрачивает на производство одной детали типа В.

- 1) 12; 2) 15; 3) 17; 4) 9; 5) Нет правильного ответа.

15. На одном из математических курсов ЭМШ преподают два друга: Эдик ведет лекции, а Миша проводит семинары и проверяет домашнее задание. Один раз ребята решили проверить домашнее задание вместе. В какой-то момент после начала проверки Эдику позвонили и ему пришлось оставить Мишу проверять остаток работ в одиночку. В результате время, затраченное на проверку этого домашнего задания, оказалось в 3 раза меньше времени, необходимого Мише на проверку этого домашнего задания им одним. Во сколько раз Эдик затратил бы больше времени, проверяя в одиночку всё задание, по сравнению с тем временем, которое он провёл за совместной с Мишей проверкой?

- 1) 1,5; 2) 3; 3) 2; 4) 5; 5) Нет правильного ответа.

16. Решите в целых числах уравнение $x^2 - 4xy - 4y^2 = 0$

В ответе укажите количество пар (x, y) , являющихся решениями

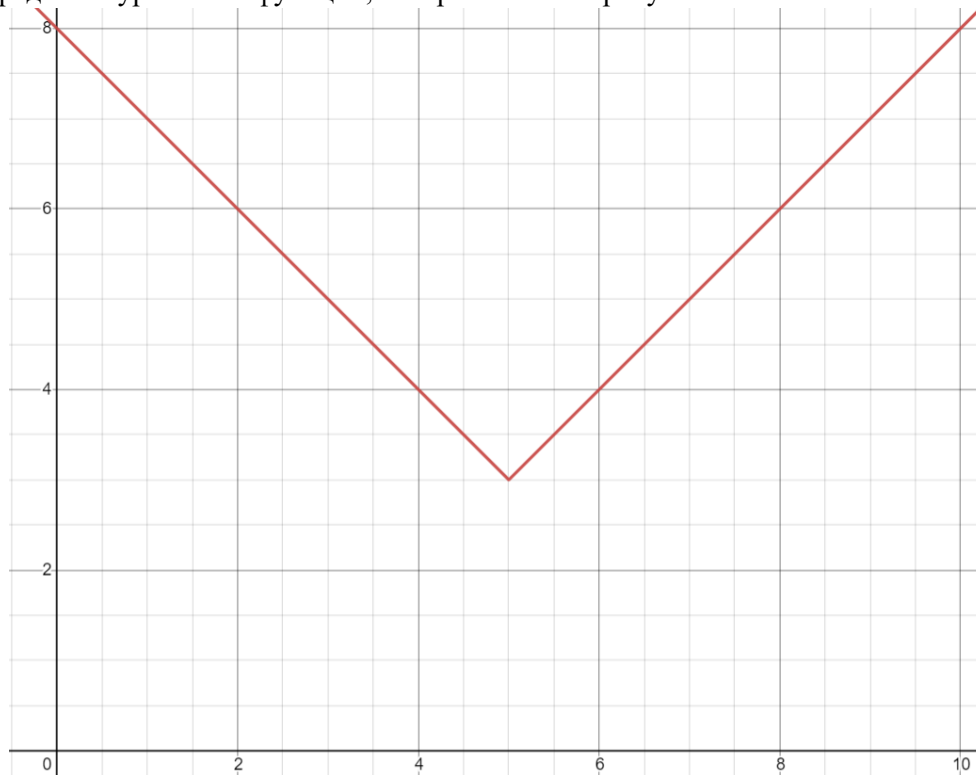
- 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 4; 5) Нет правильного ответа.

17. Дано квадратное уравнение $x^2 - \sqrt{5}x + c^2 - 4c + 4 = 0$. Пусть x_1 и x_2 – его корни для некоторого c . Найдите значение выражения:

$$\frac{\sqrt{23} - \sqrt{5}x_1}{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2} + \frac{-\sqrt{23} - \sqrt{5}x_2}{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}$$

- 1) 0; 2) -1; 3) $\sqrt{5}$; 4) Невозможно определить; 5) Нет правильного ответа.

18. Определите уравнение функции, изображенной на рисунке ниже:



- 1) $y = |x - 5| + 3$; 2) $y = |x + 5| + 3$; 3) $y = 5|x| + 3$; 4) $y = |x| + 3$; 5) Нет правильного ответа.

19. Укажите количество решений уравнения:

$$\sqrt[3]{x+2} = 3 - x$$

- 1) 0; 2) 1; 3) 7; 4) бесконечно много; 5) Нет правильного ответа.

20. Решите уравнение:

$$x + 4 = \sqrt{12x + 13}$$

В ответе укажите сумму решений.

- 1) -1; 2) 0; 3) 1; 4) 4; 5) Нет правильного ответа.

21. Укажите вариант ответа, в котором перечислены все верные утверждения:

- а) Внешний угол треугольника равен сумме углов треугольника, не смежных с ним
б) Центром описанной вокруг треугольника окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров
в) Площади подобных треугольников относятся как коэффициент подобия

- 1) б; 2) б, в; 3) а, б; 4) а, в; 5) Нет правильного ответа.

22. Посчитайте значение выражения при $a = 2, b = 3, c = 1$:

$$\frac{a^3 b^2 c^4}{\sqrt{a^4 b}}$$

- 1) 24; 2) 12; 3) 6; 4) 18; 5) Нет правильного ответа.

23. Решите неравенство:

$$\frac{(x-2)^2(x-1)}{x+3} \geq 0$$

Выберите множество, являющееся решением.

- 1) $(-\infty; -3) \cup [1; +\infty)$; 2) $(-3; 1] \cup [2; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$; 4) $[-3; 1] \cup [2; +\infty)$; 5) Нет правильного ответа.

24. Первая прямая задаётся уравнением: $5y + x - 12 = 0$

Вторая прямая задаётся уравнением: $y - 5x - 11 = 0$

Найдите наименьший угол между прямыми. Ответ дайте в градусах.

- 1) 30; 2) 45; 3) 60; 4) 90; 5) Нет правильного ответа.

25. Найдите площадь фигуры, задаваемой системой неравенств:

$$\begin{cases} |x| + |y| \leq 4 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- 1) 4; 2) 8; 3) 16; 4) 2; 5) Нет правильного ответа.

Вступительный тест по математике, ЭМШ, 2021-2022 год, вариант _____

26. В далёкой-далёкой галактике во времена войн клонов на верфях Куата собирались бронетранспортёры «Джаггернаут НАVw А6». Длинной они были в 69 метров и развивали скорость в 160 км/ч. За сколько секунд этот транспорт проедет мимо шагохода «АТ-ТЕ» длиной в 41 метр, если скорость второго равна 60 км/ч? Считайте, что бронетранспортёр и шагоход движутся параллельно и навстречу друг другу. Другими словами, вам требуется найти время, которое пройдет с момента, когда передние части бронетранспортера и шагохода сравняются, до момента, когда задние части транспортных средств поравняются.

- 1) 1,8; 2) 1,4; 3) 1,6; 4) 3,96; 5) Нет правильного ответа.

27. По двум concentрическим окружностям (concentрическими называются окружности, у которых центры совпадают) с центрами в точке О равномерно вращаются две точки А и В. Одна из них совершает полный оборот за 5 секунд быстрее, чем другая, и поэтому за 1 минуту успевает сделать на два оборота больше. Считая, что в начале движения точки находились на одном луче, выходящем из центра окружностей, вычислите величину угла (в градусах) между лучами ОА и ОВ через 1 секунду. Считайте, что обе точки вращаются по часовой стрелке.

- 1) 60; 2) 12; 3) 36; 4) 24; 5) Нет правильного ответа.

28. Упорядочите по возрастанию следующие числа: $\sqrt{2}$; π ; $\sqrt[3]{16}$.

- 1) $\sqrt{2}$; π ; $\sqrt[3]{16}$ 2) $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{16}$; π 3) $\sqrt[3]{16}$; $\sqrt{2}$; π 4) π ; $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{16}$ 5) Нет правильного ответа.

29. Выпускнику Косте на Летней Школе ЭМШ достался сложный проект. В нем требовалось преобразовать данные, а затем провести их анализ. Костя утверждает, что данные были настолько плохими, что на их преобразование у него ушло 80% от суммарного времени, затраченного на проект. При этом он невзначай добавил, что на сам анализ данных у него ушло 3 часа. Сколько часов он потратил на преобразование данных?

- 1) 8 2) 10 3) 12 4) 15 5) Нет правильного ответа.

30. Дан параллелограмм ABCD, у которого угол ВАС равен 30 градусам, угол ВDC равен 60 градусам, а сторона ВС равна 3. Найдите площадь ABCD. В ответе укажите интервал, которому принадлежит найденная величина.

- 1) (1;2); 2) (3;4); 3) (5;6); 4) (7;8); 5) Нет правильного ответа.